

1 Ressort sur une porte tournante

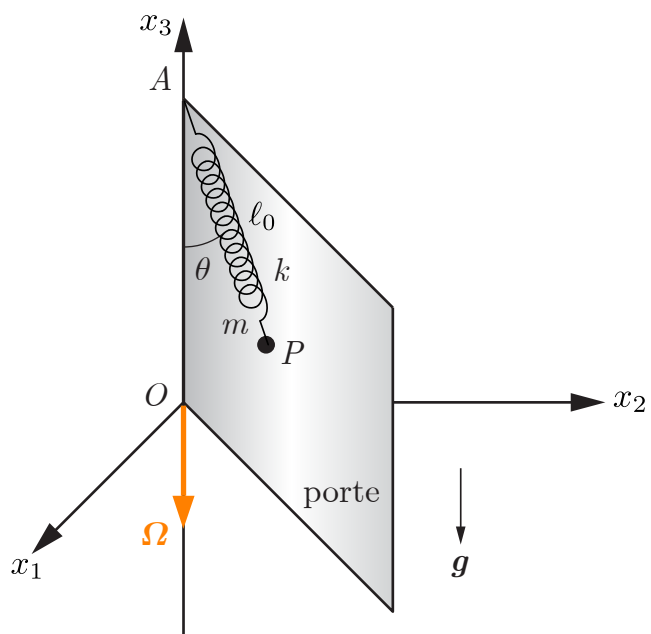
🎯 **Objectif** : Modéliser un mouvement relatif en rotation en coordonnées sphériques.

📖 **Théorie** : 10.2 Référentiels accélérés ; 10.3 Mouvement relatif.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Un point matériel P de masse m est attaché à l'extrémité d'un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est suspendue à un point fixe A de la charnière d'une porte. L'oscillateur est astreint à se déplacer dans le plan vertical de la porte qui a un mouvement de rotation à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega \hat{\mathbf{x}}_3$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Le frottement est négligé.

- Déterminer les vecteurs force centrifuge $\mathbf{F}_c$ et force de Coriolis $\mathbf{F}_C$ exercés sur la masse m par rapport au référentiel relatif de la porte.
- Déterminer les équations du mouvement relatif du point matériel P par rapport au référentiel relatif de la porte et en déduire la force de réaction normale $\mathbf{N}$ exercé par la porte sur la masse m .



- Dans le cas particulier où l'angle d'inclinaison θ_0 de l'oscillateur est maintenu constant, déterminer la condition sur la vitesse angulaire scalaire Ω pour qu'il y ait des oscillations autour d'une coordonnée radiale d'équilibre et déterminer alors la coordonnée radiale d'équilibre r_0 .
- Dans le cas particulier où la longueur du ressort est maintenue constante, c'est-à-dire $r = \ell$, déterminer les angles d'équilibre $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

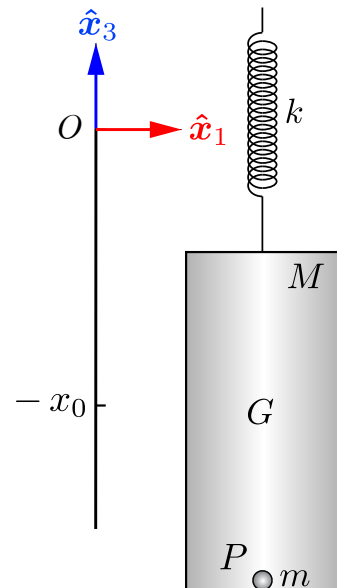
- (e) Dans le cas particulier de la question précédente, déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_2 lorsque $\Omega^2 \geq g/\ell$ en utilisant les développements limités en $\alpha = \theta - \theta_2 \ll 1$ autour de θ_2 .

2 Boîte suspendue par un ressort

🎯 **Objectif** : Modéliser le mouvement relatif en translation d'un système de points matériels.

📖 **Théorie** : 10.2 Référentiels accélérés ; 10.3 Mouvement relatif

Un point matériel de masse m est situé au fond d'une boîte de masse M . La masse du point matériel est négligeable par rapport à la masse de la boîte, c'est-à-dire $M \gg m$, mais la réciproque n'est pas vraie. La boîte est suspendue à un ressort de constante élastique k . La boîte est initialement tirée vers le bas d'une distance x_0 par rapport à l'extrémité du ressort à vide, qui coïncide avec l'origine O , et lâchée avec une vitesse initiale nulle.



- Déterminer l'équation du mouvement absolu du centre de masse G de la boîte.
- Déterminer l'équation du mouvement relatif de la masse m par rapport au référentiel de la boîte.
- Etablir la condition que doit satisfaire la masse m afin de ne pas décoller du fond de la boîte en fonction de x_0 .

3 Etoile et exoplanète

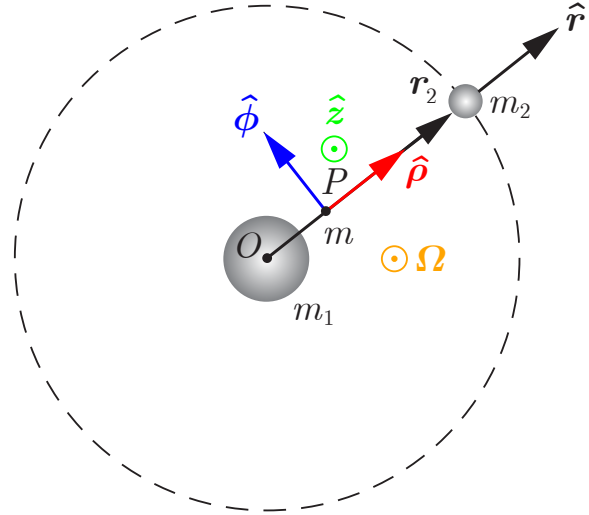
🎯 **Objectif** : Modéliser un mouvement gravitationnel relatif en rotation en coordonnées polaires.

📖 **Théorie** : 9.2 Loi de la gravitation universelle ; 10.2 Référentiels accélérés.

★ **Examen** : Problème d'examen.

On considère un système stellaire constitué de deux astres : une étoile de masse m_1 et une exoplanète de masse m_2 . L'étoile a une masse beaucoup plus grande que l'exoplanète, c'est-à-dire $m_1 \gg m_2$. Les astres sont traités comme des points

matériels et le système est considéré comme isolé car on peut négliger l'influence gravitationnelle du reste de l'univers. On prend comme origine O le centre de masse de l'étoile. L'exoplanète a un mouvement de rotation circulaire uniforme autour de l'étoile dans le plan stellaire par rapport au référentiel absolu $\mathcal{R}$ centré à l'origine O . Ce mouvement est décrit par le vecteur vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = \Omega \hat{\mathbf{z}}$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, le vecteur position de l'exoplanète est $\mathbf{r}_2 = r_2 \hat{\mathbf{r}}$. Une sonde de masse m considérée comme un point matériel P a un mouvement relatif rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. La masse m de la sonde est négligeable par rapport aux masses m_1 et m_2 . Ainsi, la présence de la sonde ne modifie pas le mouvement des astres.



- Déterminer la vitesse angulaire scalaire Ω qui décrit la rotation uniforme de l'exoplanète autour de l'étoile.
- Le mouvement relatif rectiligne de la sonde est dû à son moteur qui exerce une force $\mathbf{F} = F \hat{\phi}$ orthogonale au mouvement. Déterminer la norme et l'orientation des autres forces exercées sur la sonde.
- Déterminer l'équation du mouvement relatif de la sonde selon la ligne de coordonnée radiale de vecteur unitaire $\hat{\rho}$.
- Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre ρ_0 de la sonde entre les deux astres dans le référentiel relatif. La démarche à suivre consiste à utiliser la distance $r_0 = r_2 - \rho_0 > 0$ qui sépare la coordonnée d'équilibre et l'exoplanète, où $r_0/r_2 \ll 1$ car $m_2 \ll m_1$, puis à se servir du développement limité au premier ordre en r_0/r_2 suivant,

$$\frac{1}{(r_2 - r_0)^2} = \frac{1}{r_2^2 \left(1 - \frac{r_0}{r_2}\right)^2} \simeq \frac{1}{r_2^2} \left(1 + 2 \frac{r_0}{r_2}\right)$$

afin d'identifier r_0 .